

CodeIQ「カット・アンド・スクエア」問題 解法

Kawazoe (@riverplus)

上 $n/2$ 桁と下 $n/2$ 桁とに分けて 2 乗の和をとると元に戻るような数を探す問題です。
 n 桁の整数をひとつひとつ調べる方法では非効率です。

上 $n/2$ 桁の数を a 、下 $n/2$ 桁の数を b とおきましょう。
題意を式で表すと次のようになります。

$$10^{\frac{n}{2}}a + b = a^2 + b^2$$

これを a についての二次方程式とみなします。解の公式から、 a は次のように表されます。

$$a = \frac{1}{2} (10^{\frac{n}{2}} \pm \sqrt{10^n - 4b^2 + 4b})$$

ここで a は整数ですから、少なくとも根号の部分は整数でなければなりません。

つまり $10^n - 4b^2 + 4b$ が平方数となるような b を探せばよいと分かります。

これは b の値として $n/2$ 桁の整数をひとつひとつ調べていけば OK です。

平方数かどうかを判定するには、例えば、まず標準ライブラリの sqrt 関数などで $10^n - 4b^2 + 4b$ の平方根を求め、それを整数型の変数にキャストして小数部分を落とし、さらにそれを 2 乗して元の数に戻るか見るという方法が考えられます(*)。

そのような b を見つけたら、実際に a の値を計算して、 $n/2$ 桁の整数かどうかチェックしましょう。

(*) ただこれは浮動小数点型の変数の誤差を考慮していないため、厳密な解き方ではありません。

(今回の範囲では問題ないため採点では OK としています。) 整数の範囲で平方根を正しく得るには、例えば以下のページをご覧ください。

<http://d.hatena.ne.jp/inamori/20130815/p1>

別解を紹介します。 $A = 2a - 10^{\frac{n}{2}}$, $B = 2b - 1$ と変数変換を行うと、題意の式は次のようになります。

$$A^2 + B^2 = 10^n + 1$$

整数を 2 平方和で表す問題に帰着されます。以下のページなどで解法が言及されています。

<http://akademeia.info/index.php?2%A4%C4%A4%CE%CA%BF%CA%FD%BF%F4%A4%CE%CF%C2>

$10^n + 1$ が小さな素因数に分解される場合には、比較的高速に正解が得られます。

が、 $10^n + 1$ を素因数分解するという処理が必要になるため、 $10^n + 1$ が素数の場合や、大きな素因数を持つ場合には、上の $n/2$ 桁の整数をひとつひとつ調べる方法とトータル的計算量的には大して変わりません。

(なお、すみませんが、本問の公開終了日までは、この URL を周りに教えないよう、ご協力お願いします。)