CodeIQ「スロット・マシン」問題 解法

Kawazoe (@riverplus)

n 個の整数をランダムに選ぶときの「最も多く出現した数字の出現回数」の期待値を求める問題です。

まずは、期待値の定義どおりに考えましょう。

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} k \times \left(\text{賞金が}k\text{ドルとなる確率}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{\left(\text{賞金が}k\text{ドルとなる場合の数}\right)}{\left(\text{全ての出方の場合の数}\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{\left(\text{賞金が}k\text{ドルとなる場合の数}\right)}{10^n}$$

各 k について、賞金が k ドルとなる場合の数を求めましょう。
単純な考え方としては、全ての出方をひとつひとつ調べる方法が思い当りますが、
n 個の数字の出方は全部で10^n 通りあるため、かなり非効率な処理になってしまいます。

そこで、数字の出方をパターンに分類し、同じパターンの場合の数をまとめて計算することが本問のポイントです。以下、$n = 6$ の場合を例にします。

- **賞金が1ドルとなる場合**（例：123456）
  - 全ての数字がバラバラになるということです。
    数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_6$通り、その並べ方が6!通りあります。
    場合の数はこの積です。
- **賞金が2ドルとなる場合**
  - 他の4つの数字が全てバラバラの場合（例：112345）
    数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_4$通り、その並べ方が$6! \div 2!$通りあります。
    場合の数はこの積です。
  - 2回出現する数字がもう1組存在する場合（例：112234）
    数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_2 \times {}_8\mathrm{C}_2$通り、その並べ方が$6! \div 2! \div 2!$通りあります。
  - 2回出現する数字がもう2組存在する場合（例：112233）
    数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_3$通り、その並べ方が$6! \div 2! \div 2! \div 2!$通りあります。
- **賞金が3ドルとなる場合**
  - 他の3つの数字が全てバラバラの場合（例：111234）
    数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_3$通り、その並べ方が$6! \div 3!$通りあります。
  - 2回出現する数字が存在する場合（例：111223）

数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_1 \times {}_8\mathrm{C}_1$通り、その並べ方が$6! \div 3! \div 2!$通りあります。

- ➢ 3回出現する数字がもう1組存在する場合（例：111222）
  数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_2$通り、その並べ方が$6! \div 3! \div 3!$通りあります。

- **賞金が4ドルとなる場合**
  - ➢ 他の2つの数字が全てバラバラの場合（例：111123）
    数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_2$通り、その並べ方が$6! \div 4!$通りあります。
  - ➢ 2回出現する数字が存在する場合（例：111122）
    数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_1$通り、その並べ方が$6! \div 4! \div 2!$通りあります。
- **賞金が5ドルとなる場合**（例：111112）
  - ➢ 数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_1 \times {}_9\mathrm{C}_1$通り、その並べ方が$6! \div 5!$通りあります。
- **賞金が6ドルとなる場合**（例：111111）
  - ➢ 数字の選び方が${}_{10}\mathrm{C}_1$通り、その並べ方が$6! \div 6!$通りあります。

以上を実際に計算してみると、期待値を算出することができます。

以上は$n = 6$の場合の説明です。$n = 12$の場合についても、同様の場合分けを行えば、全ての出方をひとつひとつ調べるより少ない計算量で答えが求められます。が、場合分けがきわめて複雑になるため、手計算で行うのは非現実的です。

そこで、上の各場合分けをじっと見てみると、「整数 n を整数の和として表す方法」の一つ一つに対応することが分かります。
自然数の分割：
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%87%AA%E7%84%B6%E6%95%B0%E3%81%AE%E5%88%86%E5%89%B2
このような分割の仕方を列挙するには再帰コードが有用です。
分割の仕方のそれぞれに対する場合の数を求めるには、上記の $n = 6$ の場合を参考に、数字の選び方と並べ方を二項係数と階乗を使って表し、その積を求めれば OK です。（詳細は省略します。）

（なお、すみませんが、本問の公開終了日までは、この URL を周りに教えないよう、ご協力お願いします。）